VEKTOROVÝ POČET

REÁLNÝ LINEÁRNÍ PROSTOR

Definice: Množina $M = \{x, y, z, \dots\}$ se nazývá **reálný lineární prostor**, když:

a) $x, y \in M \Rightarrow x + y \in M$ (na M je definováno sčítání prvků),

b) $\alpha \in \mathbb{R}, x \in M \Rightarrow \alpha \cdot x \in M$ (na M je definováno násobení skalárem),

pro každé $x, y \in M$, $\alpha \in \mathbb{R}$ a operace sčítání a násobení skalárem jsou pro každé $x, y, z \in M$ a každé $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ vázány axiomy:

1. $x + y = y + x$
2. $(x+y) + z = x + (y+z)$
3. existuje nulový prvek $o \in M$ takový, že $x + o = x$
4. ke každému prvku x existuje opačný prvek $-x$ tak, že platí $x + (-x) = o$
5. $1 \cdot x = x$
6. $\alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x$
7. $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$
8. $\alpha(x+y) = \alpha x + \alpha y$

Prvky $x, y, z, \dots$ nazýváme **vektory**.

Definice: Jsou-li $x_1, x_2, \dots, x_n$ vektory a $c_1, c_2, \dots, c_n \in \mathbb{R}$, pak vektor

$$x = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \dots + c_n x_n$$

nazveme **lineární kombinací** vektorů $x_1, x_2, \dots, x_n$.

Vektory $x_1, x_2, \dots, x_n$ nazveme **lineárně nezávislé**, když

$$c_1 x_1 + c_2 x_2 + \dots + c_n x_n = o \iff c_1 = c_2 = \dots = c_n = 0,$$

(tj. žádný z vektorů nelze zapsat jako lineární kombinaci ostatních vektorů).

V opačném případě jsou vektory $x_1, x_2, \dots, x_n$ **lineárně závislé**. (alespoň jedno $c_i \neq 0$)

Definice: Vektory $x_1, x_2, \dots, x_n$ tvoří **bázi** lineárního prostoru M, když jsou lineárně nezávislé a každý další vektor $x \in M$ je již jednoznačnou lineární kombinací vektorů $x_1, x_2, \dots, x_n$, tj.:

$$x \in M \Rightarrow x = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \dots + c_n x_n \quad (c_1, c_2, \dots, c_n \in \mathbb{R})$$

Počet n vektorů báze se nazývá **dimenze** lineárního prostoru M. Koeficienty $c_1, c_2, \dots, c_n \in \mathbb{R}$ se nazývají **souřadnice vektoru** x v uspořádané bázi $\langle x_1, x_2, \dots, x_n \rangle$.

Př: Určete, zda vektory x, y, z jsou lineárně závislé či nezávislé!

1) $x = (1, 2, -2)$
$y = (-2, -3, 1)$
$z = (-1, 2, 2)$

$$c_1 x + c_2 y + c_3 z = o \Leftrightarrow \begin{aligned} c_1 - 2c_2 - c_3 &= 0 \\ 2c_1 - 3c_2 + 2c_3 &= 0 \\ -2c_1 + c_2 + 2c_3 &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{array}{ccc} x & y & z \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 2 & -3 & 2 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & -3 & 0 \end{pmatrix} \begin{aligned} &\Rightarrow c_1 - 2c_2 - c_3 = 0 \\ &\Rightarrow c_2 + 4c_3 = 0 \\ &\Rightarrow -3c_2 = 0 \end{aligned} \quad \left.\begin{aligned} &\Rightarrow c_1 = 0 \\ &\Rightarrow c_3 = 0 \\ &\Rightarrow c_2 = 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ vektory x, y, z jsou <u>lineárně nezávislé</u>.

2) $x = (1, 0, 2)$
$y = (4, 1, 0)$
$z = (-2, -1, 4)$

$$c_1 x + c_2 y + c_3 z = o \Leftrightarrow \begin{aligned} c_1 + 4c_2 - 2c_3 &= 0 \\ c_2 - c_3 &= 0 \\ 2c_1 \quad + 4c_3 &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -8 & 8 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{aligned} &\Rightarrow c_1 + 4c_2 - 2c_3 = 0 \Rightarrow (*) \\ &\Rightarrow c_2 - c_3 = 0 \Rightarrow c_2 = c_3 = t \end{aligned}$$

$$c_3 = t$$

∞ řešení, 1 parametr

$$(*)\ c_1 = 2c_3 - 4c_2 = 2t - 4t = -2t$$

např. pro $t = 1$: $c_1 = -2$, $c_2 = 1$, $c_3 = 1$

$$-2x + y + z = o \Rightarrow \underline{y = 2x - z} \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ vektory x, y, z jsou <u>lineárně závislé</u>.

Př: Vyjádřete vektor d jako lineární kombinaci vektorů a, b, c.
$a = (3,2,1)$, $b = (7,5,0)$, $c = (-2,3,4)$, $d = (-12,4,-3)$

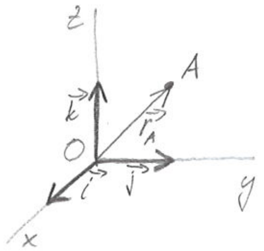
$$k \cdot a + l \cdot b + m \cdot c = d \iff \begin{aligned} 3k + 7l - 2m &= 12 \\ 2k + 5l + 3m &= 4 \\ k \qquad + 4m &= -3 \end{aligned}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 4 & -3 \\ 2 & 5 & 3 & 4 \\ 3 & 7 & -2 & 12 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 4 & -3 \\ 0 & 5 & -5 & 10 \\ 0 & 7 & -14 & 21 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 4 & -3 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 4 & -3 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{c} \Rightarrow \\ \Rightarrow \\ \Rightarrow \end{array}$$

$$\left.\begin{array}{l} \Rightarrow k + 4m = -3 \Rightarrow k = -3 - 4m = -3 + 4 = 1 \\ \Rightarrow l - m = 2 \Rightarrow l = 2 + m = 2 - 1 = 1 \\ \Rightarrow \quad -m = 1 \Rightarrow m = -1 \end{array}\right\} \Rightarrow \underline{\underline{d = a + b - c}}$$

LINEÁRNÍ PROSTOR $\mathbb{E}_3$ ... Eukleidovský prostor

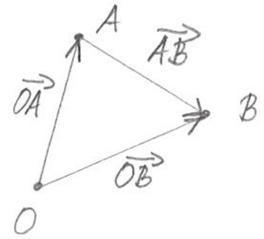
$$\left.\begin{array}{l} \vec{i} = (1,0,0) \\ \vec{j} = (0,1,0) \\ \vec{k} = (0,0,1) \end{array}\right\} \text{jednotkové vektory na osách – báze } \mathbb{E}_3$$



- S každým bodem A lze uvažovat polohový vektor $\vec{r_A}$
  $\vec{r_A} = \vec{OA} = x_A \cdot \vec{i} + y_A \cdot \vec{j} + z_A \cdot \vec{k} = (x_A, y_A, z_A)$

- x_A, y_A, z_A ... souřadnice bodu A ... $A = [x_A, y_A, z_A]$

- Dvěma různými body $A = [x_A, y_A, z_A]$, $B = [x_B, y_B, z_B]$ je určen vektor
  $\vec{AB} = \vec{OB} - \vec{OA} = (x_B - x_A, y_B - y_A, z_B - z_A)$

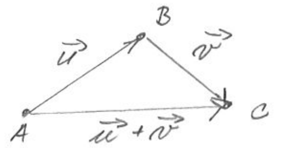


$$\vec{OA} + \vec{AB} = \vec{OB} \Rightarrow \vec{AB} = \vec{OB} - \vec{OA}$$

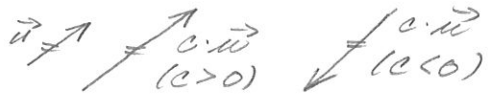
Množina všech vektorů E_3 – **vektorové zaměření** prostoru E_3
– značíme: $V(E_3)$

Platí: a) Pro libovolný bod $A \in E_3$ a libovolný vektor $\vec{u} \in V(E_3)$ existuje jediný bod $B \in E_3$ takový, že $\vec{AB} = \vec{u}$.

b) Je-li $\vec{AB} = \vec{u}$, $\vec{BC} = \vec{v}$, pak $\vec{AC} = \vec{u} + \vec{v}$ se nazývá **součet vektorů** $\vec{u}, \vec{v}$.



- **nulový vektor** $\vec{o} = \vec{AA}$, $|\vec{o}| = 0$
- **opačný vektor** k $\vec{u} = \vec{AB}$ … $-\vec{u} = \vec{BA}$
- součin vektoru s reálným číslem:
  - $c \cdot \vec{u} = \vec{o}$, je-li $\vec{u} = \vec{o}$ nebo $c = 0$
  - $c \cdot \vec{u} = \vec{v}$, kde $\vec{u} \neq \vec{o}$, $|\vec{v}| = |c| \cdot |\vec{u}|$ a vektor $\vec{v}$ je souhlasně (nesouhlasně) rovnoběžný s vektorem $\vec{u}$, je-li $c > 0$ ($c < 0$)



Kolineární vektory $\vec{u}, \vec{v}$

- existuje takové umístění, že $\vec{u}, \vec{v}$ leží na jedné přímce
- platí: 1, $\vec{u} = k \cdot \vec{v}$

  2, $k \cdot \vec{u} + l \cdot \vec{v} = \vec{o}$ (alespoň jedno $k, l \in \mathbb{R}$ různé od 0) je splněno alespoň pro jednu dvojici $k, l \in \mathbb{R}$; přičemž k, l nejsou současně rovna nule.

– **Nekolineární vektory**: $k \cdot \vec{u} + l \cdot \vec{v} = \vec{o} \Leftrightarrow k = l = 0$

Komplanární vektory $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$

- existuje takové umístění, že $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ leží v jedné rovině
- platí: 1, $\vec{w} = k \cdot \vec{u} + l \cdot \vec{v}$

  2, $k \cdot \vec{u} + l \cdot \vec{v} + m \cdot \vec{w} = \vec{o}$ (alespoň jedno $k, l, m \in \mathbb{R}$ různé od 0) je splněno alespoň pro jednu trojici $k, l, m \in \mathbb{R}$; přičemž k, l, m nejsou současně rovna nule.

– **Nekomplanární vektory**: $k \cdot \vec{u} + l \cdot \vec{v} + m \cdot \vec{w} = \vec{o} \Leftrightarrow k = l = m = 0$